

# SUJET NATIONAL BAC TECHNOLOGIQUE - BAC STT - 2004

Mathématiques, Enseignement obligatoire, juin 2004

Option : CG - IG - 2 heures - Coefficient 2 -

## FONCTION EXPONENTIELLE - CALCUL D'AIRE - INTEGRALE -

### C) CORRECTION de l'EXERCICE 3 – Pour tous les candidats : (sur 8 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = a + (x + b)e^{-x}$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels donnés.

On note  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  avec pour unités :

- 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées

### PARTIE A

1. On écrit :  $f(x) = a + (x + b)e^{-x}$  d'où  $f'(x) = e^{-x} - (x + b)e^{-x}$  soit  $f'(x) = e^{-x}(1 - b - x)$

2. a) La droite tangente en  $x = 0$  à la courbe coupe l'axe des ordonnées en  $y = 2$  donc  $f(0) = 2$ . Cette droite passe également par le point de coordonnées  $(1 ; 4)$  donc son coefficient directeur

est égal à :  $a = \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$  donc  $f'(0) = 2$ .

b) Si  $f(0) = 2$  alors  $\begin{cases} a + b = 2. \\ 1 - b = 2. \end{cases}$

On en déduit que :  $b = -1$  et  $a = 3$ .

- Conclusion : on peut donc écrire que :  $f(x) = 3 + (x - 1)e^{-x}$ , pour  $x$  réel.

### PARTIE B

1. Sachant que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , on en déduit que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty$

- On en conclut que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. On écrit :  $f(x) = 3 + (x - 1)e^{-x}$  soit  $f(x) = 3 + xe^{-x} - e^{-x}$

- Or :  $e^{-x} = 1 / e^x$  donc :  $f(x) = 3 + \frac{x}{e^x} - e^{-x}$

• De plus, on sait que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

• De plus, on sait que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  ce qui entraîne :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

- On en déduit que la droite d'équation  $y = 3$  est une asymptote horizontale à la courbe  $C$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

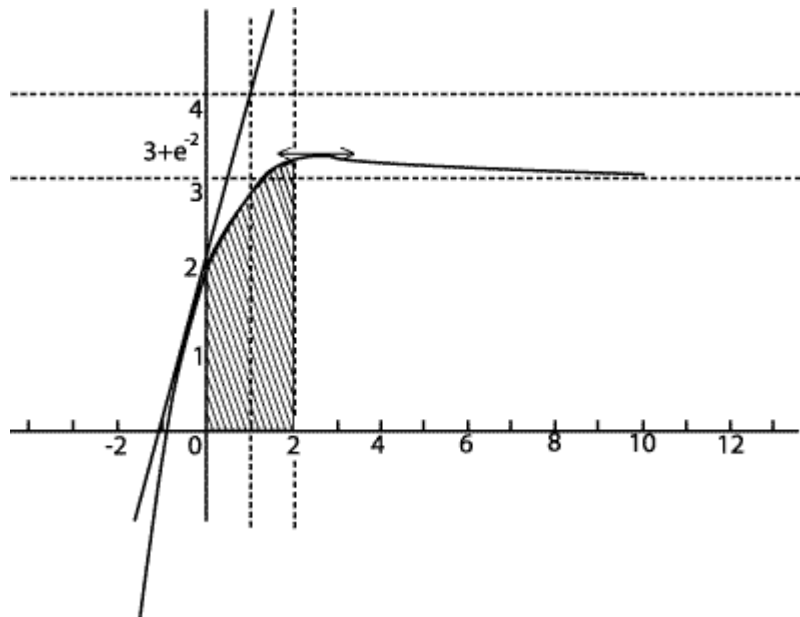
3. a) On écrit :  $f'(x) = e^{-x}(1 - b - x)$  avec  $b = -1$  donc  $f'(x) = e^{-x}(2 - x)$ .

On sait que  $e^{-x} > 0$  pour tout  $x$  réel donc  $f'(x)$  est du signe de  $(2 - x)$

donc  $f'(x) \geq 0$  si et seulement si  $x \leq 2$ . D'où le tableau de variation de  $f$ .

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f$	$-\infty$	$3+e^{-2}$	$3$

3.b) On trace la courbe C demandée



### PARTIE C

1. On considère la fonction :  $F(x) = x(3 - e^{-x})$  donc  $F'(x) = (3 - e^{-x}) + xe^{-x} = e^{-x}(x - 1) + 3$   
soit finalement :  $F'(x) = 3 + (x - 1)e^{-x} = f(x)$   
où  $f$  est la dérivée de  $F$  donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. L'aire, en  $\text{cm}^2$ , de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 2$  se traduit par :  $A = 2 \cdot \int_0^2 f(x) \cdot dx$  (en  $\text{cm}^2$ )

Le calcul successif donne :  $A = 2 \cdot [F(x)]_0^2 = 2 \cdot [x(3 - e^{-x})]_0^2 = 2 \cdot [2(3 - e^{-2})] = 12 - 4 \cdot e^{-2} \text{ cm}^2$