Chap : GEOMETRIE	Fiche n° 2	EQUATIONS ENTIERES - PGCD

1. DETERMINATION D'UN PGCD *(plus grand commun diviseur)*

a) « à la main » : écrire tous les diviseurs du nombre et multiplier les plus petites puissances des diviseurs

ex : $80 = 2^4 \times 5^1$ et $100 = 2^2 \times 5^2$

soit : PGCD (80 ; 100) $= 2^2 \times 5^1 = 20$

b) « Algorithme d'Euclide » :

→ *chercher le PGCD (4095 ; 98)*

→ *chercher le dernier reste NON nul*

→ PGCD (4095 ; 98) = 7

ex :

$4095 = 98 \times 41 + 77$ avec $(0 \leq 77 < 98)$

$98 = 21 \times 3 + 14$ avec $(0 \leq 14 < 21)$

$21 = 14 \times 1 + 7$ avec $(0 \leq 7 < 14)$

$14 = 7 \times 2 + 0$ avec $(0 \leq 0 < 7)$

2. DETERMINATION D'UN PPPCM *(plus petit commun multiple)*

a) « calcul du PPCM » par la formule : PPCM (a,b) × PGCD(a,b) = a×b soit PPCM (4095 ; 98) = $\frac{4095 \times 98}{7} = 57\,330$

3. RESOLUTION DES EQUATIONS ENTIERES

a) une équation entière est : une équation du type $a.x + b.y + c = 0$ *avec a,b et c entiers de Z*

une équation entière $a.x + b.y + c = 0$ admet des solutions si : $a \wedge b = 1$ *(a et b premiers entre eux)*

b) « Résolution par BEZOUT »

- on cherche une solution particulière avec la calculatrice ou l'algorithme d'Euclide
- on établit un système d'équations puis on utilise les théorèmes de BEZOUT et de GAUSS.
- On obtient comme solution : $S = \{ (a.k + a'), (b.k + b'), k \text{ entier} \}$

4. EXEMPLE : RESOLUTION DE : $9x - 14y = 8$

Solution particulière

- On fixe : $x = 4$ *(comme ça !!)*
- On déduit : $14y = 9 \times (4) - 8$

soit : $y = \frac{28}{14} = 2$

Système d'équation

- L'équation générale est : $9.x - 14.y = 8$
- L'équation particulière est : $9 \times 4 - 14 \times 2 = 8$

soit, en soustriant : $9x - 9 \times 4 - 14.y + 14 \times 2 = 8 - 8$

soit : $9(x - 4) - 14(y - 2) = 0$ soit encore : $9(x - 4) = 14(y - 2)$

- Or , 14 et 9 sont premiers entre eux c'est-à-dire que : $9 \wedge 14 = 1$
- D'après le théorème de GAUSS, on en déduit que : $x - 4$ est divisible par : 14 soit $x - 4 = 14.k$
- D'après le théorème de GAUSS, on en déduit que : $y - 2$ est divisible par : 9 soit $y - 2 = 9.k$

Solutions : Elles sont donc de la forme : $S = \{ (14.k + 4), (9.k + 2) ; k \in Z \}$