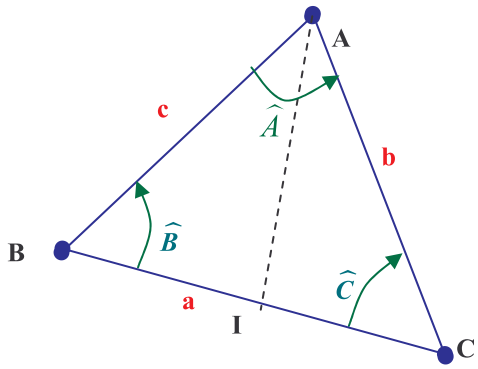
Chap : GEOMETRIE	Fiche n° 9	THEOREMES issus du PRODUIT SCALAIRE

1. THEOREME DE LA MEDIANE :

→ Soit ABC un triangle quelconque et I = milieu [AB]

→ Le théorème de la médiane exprime les 3 formules suivantes :



→ Prod.Scal : $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = AI^2 - \dfrac{BC^2}{4}$ **(1)**

→ Norme 1 : $AC^2 + AB^2 = 2.AI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$ **(2)**

→ Norme 2 : $AC^2 - AB^2 = 2.\overrightarrow{AI} \bullet \overrightarrow{CB}$ **(3)**

(1) se démontre en développant le facteur : $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) \bullet (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})$

(2) se démontre en développant le facteur : $AC^2 + AB^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2$

(3) se démontre en factorisant le facteur : $AC^2 - AB^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2 - (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2$

2. THEOREME DE AL KASHI :

→ Soit ABC un triangle quelconque et normalisé. (a = BC, b = CA, c = AB, $\widehat{A} = \widehat{CAB}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{C} = \widehat{BCA}$)

On a le 3 formules
$$\begin{cases} \bullet\ a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\widehat{A}) \\ \bullet\ b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos(\widehat{B}) \\ \bullet\ c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\widehat{C}) \end{cases}$$
(on les appelle formules tournantes)

3. THEOREME DE L'AIRE OU DE CARNOT

→ Soit ABC un triangle quelconque et normalisé. (a = BC, b = CA, c = AB, $\widehat{A} = \widehat{CAB}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{C} = \widehat{BCA}$)

→ Loi de l'aire : $S = \dfrac{1}{2}.b.c.\sin(\widehat{A}) = \dfrac{1}{2}.a.c.\sin(\widehat{B}) = \dfrac{1}{2}.a.b.\sin(\widehat{C})$

→ Loi des sinus : $\dfrac{a}{\sin(\widehat{A})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{B})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{C})} = \dfrac{abc}{2S}$

4. EQUATIONS DE DROITE ET DE CERCLE

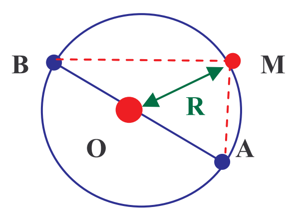
• Une équation de droite (Δ) a pour équation : $y = mx + p$ *(réduite)* ou $ax + by + c = 0$ *(cartésienne)*

• Son coefficient directeur est égal à : m *(réduite)* ou $-\dfrac{a}{b}$ *(cartésienne)*

• Son vecteur directeur est égal à : $\vec{u}\,(1, m)$ *(réduite)* ou $\vec{u}\,(1, -\dfrac{a}{b}) = (-b, a)$ *(cartésienne)*

• La droite (Δ')⊥(Δ) passant par A a pour vecteur directeur : $\vec{n}\,(1, -\dfrac{1}{m})$ *(réduite)* ou $\vec{n}\,(a, b)$ *(cartésienne)*

• La médiatrice du segment [AB] vérifie : $\forall M \in med[AB]$, $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ ou $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MH} = 0$



• Le cercle (C) de diamètre [AB] vérifie : $\forall M \in (C)$, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

• Le cercle (C) de rayon R vérifie : $\forall M \in (C)$, $\|\overrightarrow{OM}\| = R^2$

→ son équation est : $(x-x_o)^2 - (y-y_o)^2 = R^2$ par forme canonique