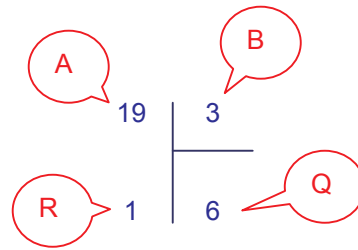


1. Division euclidienne

1.1) Définitions

- Lorsque l'on fait la division ci-contre, le nombre

- A est appelé « dividende »
- B est appelé « diviseur »
- Q est appelé « quotient »
- R est appelé « reste »



- Lorsque l'on fait une division de nombre entiers avec reste (*sans calcul décimal*), on l'appelle « **division euclidienne** »
- La formule de la « **division euclidienne** » est : **$A = B \times Q + R$** Ex : $19 = 3 \times 6 + 1$
- Lorsque $R = 0$, la formule devient : **$A = B \times Q$**
 - on dit que : **A est un multiple de B** et que **B est un diviseur de A**

1.2) Diviseur commun

- Définition : si 2 entiers naturels A et B sont divisibles par un même diviseur non nul C on dit que ce nombre C est un diviseur commun
- Exemple : 3 est un diviseur commun de 75 et de 24 car $75 = 3 \times 25$ et $24 = 3 \times 8$
- Remarque : 1 est diviseur commun de tous les entiers naturels
0 ne divise aucun nombre car la division par zéro n'existe pas.

1.3) Propriété des diviseurs communs

- Propriété : si 2 entiers naturels A et B sont divisibles par un même diviseur non nul C alors ce nombre C divise aussi la somme A+B et la différence A-B
- Exemple : 3 est un diviseur commun de 75 et de 24 car $75 = 3 \times 25$ et $24 = 3 \times 8$
or, $75 - 24 = 51$; $75 + 24 = 99$; 3 divise 51 ($51 = 17 \times 3$) ; 3 divise 99 ($99 = 33 \times 3$)

1.4) Critère de divisibilité

- Un entier naturel est divisible par 2 si celui ci est pair (ex : 2, 4, 20 etc ...)
- Un entier naturel est divisible par 3 si la somme successive de ses chiffres est elle même divisible par 3. (ex : 342 (oui) 764 (non))
- Un entier naturel est divisible par 5 si le dernier chiffre qui le compose est un 5 ou un 0 (ex : 345 (oui) 610 (oui) 764 (non))
- Un entier naturel est divisible par 9 si la somme successive de ses chiffres est elle même divisible par 9. (ex : 342 (oui) 765 (oui) 842 (non))

1.5) Nombres premiers

- Définition : un nombre est **premier** si et seulement si il n'admet aucun diviseur autre que lui et 1. (ex : 17 (oui) 71 (oui) 91 (non 7×13))
- Définition : deux nombres sont **premiers entre eux** si et seulement si ils n'admettent aucun diviseur commun autre que 1. (ex : 10 (2×5) et 9 (3×3))

Attention ! les notions de PREMIERS et PREMIERS ENTRE EUX sont différentes (2 nombres NON premiers peuvent être premiers entre eux)

Ex : $65 = 13 \times 5$ et $26 = 13 \times 2$ sont non premiers mais premiers entre eux

2) PGCD et Algorithme d'Euclide

2.1) Définition du PGCD: Le PGCD de 2 entiers est le « Plus Grand Diviseur Commun » de 2 entiers.

- Exemple : Diviseurs de 24 = (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; **12** ; 24)
Diviseurs de 36 = (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; **12** ; 18 ; 36)
On écrit : PGCD (24, 36) = 12

2.2) Algorithmes d'Euclide: Les algorithmes d'Euclide sont des techniques qui permettent de trouver le PGCD de 2 entiers lorsque celui n'est pas calculable simplement

2.3) Méthode de la division successive

- Méthode : on suppose $A > B$. On cherche le PGCD (A, B)
a) on divise A par B, puis le diviseur par le reste jusqu'à obtenir un reste nul
b) le PGCD cherché est le dernier reste NON nul.

- Exemple : on cherche le PGCD (4972, 1356)

4972		1356		1356		904		904		452			
904		3		452		1		0		2			

Le PGCD (4972 ; 1356) = 452

$4972 = 1356 \times 3 + 904$
 $1356 = 904 \times 1 + 452$
 $904 = 452 \times 2 + 0$

2.4) Méthode de la soustraction successive

- Méthode : on suppose $A > B$. On cherche le PGCD (A, B)
a) on remplace le PGCD (A,B) par celui de (A, B-A)
b) on soustrait successivement les 2 plus petits nombres parmi les 3 trouvés lors de la 1^{ère} soustraction jusqu'à obtenir 2 nombres égaux.

- Exemple : on cherche le PGCD (4972, 1356)

4972		3616		2260		1356		904
- 1356		- 1356		- 1356		- 904		- 452
<hr/>								
3616		2260		904		452		452

- Conclusion : Le PGCD (4972 ; 1356) = 452 car on a 2 fois 452

2.5) Nombres premiers entre eux

- Théorème : « 2 entiers A et B sont premiers entre eux si PGCD (A,B) = 1 »

3) Applications du PGCD - Fraction irréductible

3.1) Fraction irréductible : Une fraction est dite irréductible si l'on ne peut plus la simplifier.

Cela signifie que son numérateur et son dénominateur son premiers entre eux.

- Exemple : $\frac{7}{4}$ est irréductible $\frac{36}{24}$ n'est pas irréductible

3.2) Technique pour rendre une fraction irréductible :

- a) On calcule le PGCD (numérateur , dénominateur)
- b) on simplifie le numérateur et le dénominateur par le PGCD trouvé

- Exemple : rendre irréductible la fraction $\frac{988}{1924}$

On utilise l'algorithme d'Euclide. On constate que :

$$\begin{aligned} 1924 &= 988 \times 1 + 936 \\ 988 &= 936 \times 1 + \boxed{52} \\ 936 &= 52 \times 18 + 0 \end{aligned}$$

On peut écrire : $\frac{988}{1924} = \frac{52 \times 19}{52 \times 37} = \frac{19}{37}$

3.3) Problème solutionnable avec un calcul de PGCD

- Exemple : Un enfant dispose de 108 billes rouges et 135 billes noires.
Il veut faire des paquets de sorte que :
 - tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges
 - tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires
 - toutes les billes noires et rouges soient utilisées.
- a) quel nombre maximal de paquets pourra t-il réaliser ?
b) Combien y'a t-il alors de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

- Réponse :

a) On cherche le PGCD (108 ; 135) c'est à dire :

$$\begin{aligned} 135 &= 108 \times 1 + \boxed{27} \\ 108 &= 27 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

On en déduit que le **PGCD (108 , 135) = 27**
et donc que le nombre maximal de paquets réalisables est de **27**.

b) On constate que : $\frac{108}{27} = 4$ et $\frac{135}{27} = 5$.

L'enfant peut donc mettre **5 billes noires** et **4 billes rouges** dans chacun des 27 sacs.