Chap : GEOMETRIE	4^{eme}/ 3^{eme} Collège	TRIGONOMETRIE dans un TRIANGLE RECTANGLE

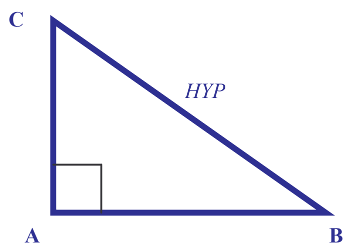
1. Vocabulaire utilisé en trigonométrie

ON TRAVAILLE TOUJOURS DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

On considère un triangle rectangle ABC avec ses 3 angles : $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CAB}$

- Le segment [BC] est appelé : « hypoténuse »

  (il est toujours en face l'angle droit)



- Le segment [AB] est appelé :

  « coté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$» ou

  « coté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$»

- Le segment [AC] est appelé :

  « coté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$» ou

  « coté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$»

2. Formules de trigonométrie – Utilisation de ces formules

2.1) Formule fondamentales

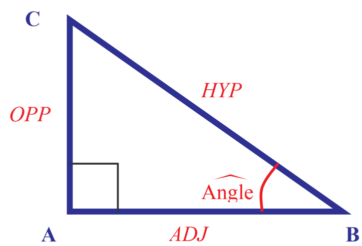
- En trigonométrie, il existe des centaines de formules, toutes établies à partir de 3 formules particulières appelées « fondamentales »

  Ces 3 formules sont :

a) $\sin(\widehat{Angle}) = \dfrac{\text{coté\_opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{\textbf{opp}}{\textbf{hyp}}$

b) $\cos(\widehat{Angle}) = \dfrac{\text{coté\_adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{\textbf{adj}}{\textbf{hyp}}$

c) $\tan(\widehat{Angle}) = \dfrac{\text{coté\_opposé}}{\text{coté\_adjacent}} = \dfrac{\textbf{opp}}{\textbf{adj}}$



- Exemple :

$\sin(\widehat{C}) = \dfrac{opp}{hyp} = \dfrac{AB}{CB}$ $\qquad$ $\sin(\widehat{B}) = \dfrac{opp}{hyp} = \dfrac{AC}{CB}$

$\cos(\widehat{C}) = \dfrac{adj}{hyp} = \dfrac{AC}{CB}$ $\qquad$ $\sin(\widehat{B}) = \dfrac{opp}{hyp} = \dfrac{AB}{CB}$

$\tan(\widehat{C}) = \dfrac{opp}{adj} = \dfrac{AB}{AC}$ $\qquad$ $\tan(\widehat{B}) = \dfrac{opp}{adj} = \dfrac{CA}{AB}$

- Remarque : dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle est égal au cosinus de l'autre angle.

- Remarque : puisque BC > AB, alors $\dfrac{AB}{CB} < 1$ donc $\sin(\widehat{C}) < 1$

  puisque AC > AB, alors $\dfrac{AC}{CB} < 1$ donc $\cos(\widehat{C}) < 1$

- Conclusion : pour tous les angles, les valeurs de cosinus et sinus sont comprises entre les valeurs –1 et °1

2.2) Utilisation de la machine en trigonométrie ?

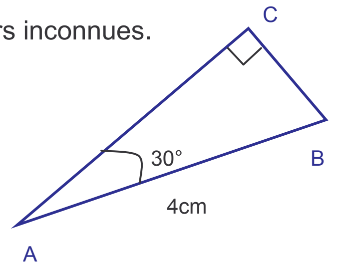
a) tous les calculs se passent en mode DEGRE

b) les valeurs de sinus et cosinus sont comprises entre [-1 ; +1]

• Valeurs remarquables en trigonométrie

Angle $\hat{x}$	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin(\hat{x})$	0	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}707$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866$	1	0
$\cos(\hat{x})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}707$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	0	-1
$\tan(\hat{x})$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0{,}577$	1	$\sqrt{3} \simeq 1{,}732$	ERREUR	0

2.3) Comment calculer la longueur d'un coté avec la trigonométrie ?



• Les formules de trigonométrie servent à calculer des longueurs inconnues.

• On utilise la méthode suivante :

a) on identifie les cotés que l'on cherche et que l'on connaît

b) on écrit les formules correspondant aux 2 cotés

c) on résout l'équation issue de la formule de trigonométrie

• Exemple : Calculer CB et AC

a) on identifie : [BC] est le coté opposé à 30°

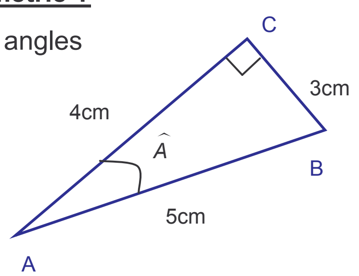
[AB] est l'hypoténuse = 4cm

[AC] est le coté adjacent à 30°

b) On a : $\cos(30°) = \frac{adj}{hyp} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{4}$ d'où $AC = 4 \times \cos(30°) = 3{,}46cm$

c) On a : $\sin(30°) = \frac{opp}{hyp} = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{4}$ d'où $BC = 4 \times \sin(30°) = 2cm$

2.4) Comment calculer la valeur d'un angle avec la trigonométrie ?



• Les formules inverses de trigonométrie servent à calculer des angles

• On utilise la méthode suivante :

a) on identifie les cotés que l'on cherche et que l'on connaît

b) on écrit les formules correspondant aux 2 cotés

c) on utilise les touches $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ en DEG

• Exemple : Calculer $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$

a) on identifie : [BC] est le coté opposé à $\widehat{A}$

[AB] est l'hypoténuse

[AC] est le coté adjacent à $\widehat{A}$

b) On a : $\tan(\widehat{A}) = \frac{opp}{adj} = \frac{CB}{AC} = \frac{3}{4}$ d'où $\widehat{A} = \tan^{-1}(\frac{3}{4}) = 36{,}86° \simeq 36{,}9°$

c) On a : $\sin(\widehat{B}) = \frac{opp}{hyp} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$ d'où $\widehat{B} = \sin^{-1}(\frac{4}{5}) = 53{,}13° \simeq 53{,}1°$

• *Remarque : on vérifier que 53,1°+36,9°+90° = 180° comme tout triangle*

3. Relations entre les formules de trigonométrie

3.1) Moyens mémotechniques

• SIN = $\dfrac{\text{OPP}}{\text{HYP}}$ donne : SOH • COS = $\dfrac{\text{ADJ}}{\text{HYP}}$ donne : CAH • TAN = $\dfrac{\text{OPP}}{\text{ADJ}}$ donne : TOA

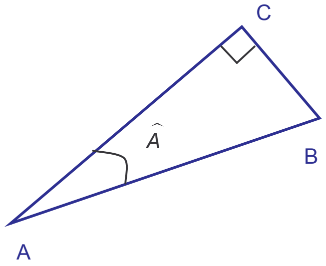
• Conclusion : S O H C A H T O A

3.2) Relation SIN / COS / TAN

• On a : • $\sin(\widehat{A}) = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \dfrac{CB}{AB}$

• $\cos(\widehat{A}) = \dfrac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \dfrac{AC}{AB}$

• $\tan(\widehat{A}) = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}} = \dfrac{CB}{AB}$

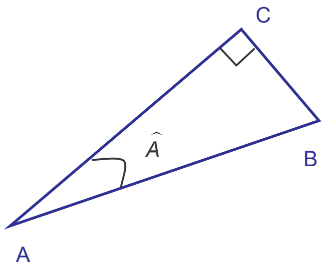


• On a : $\underbrace{\dfrac{CB}{AB}}_{\sin(\widehat{A})} \div \underbrace{\dfrac{AC}{AB}}_{\cos(\widehat{A})} = \dfrac{CB}{AB} \times \dfrac{AB}{AC} = \underbrace{\dfrac{CB}{AB}}_{\tan(\widehat{A})}$ soit

$\sin(\widehat{A}) \div \cos(\widehat{A}) = \tan(\widehat{A})$

$$\boxed{\text{Pour tout angle } \widehat{A},\ \tan(\widehat{A}) = \dfrac{\sin(\widehat{A})}{\cos(\widehat{A})}}$$

3.3) Relation de Pythagore en trigonométrie



• Le triangle ABC etant rectangle en C, on peut écrire

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

• De plus : $\sin(\widehat{A}) = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \dfrac{CB}{AB}$ soit $\sin^2(\widehat{A}) = \dfrac{CB^2}{AB^2}$

• De plus : $\cos(\widehat{A}) = \dfrac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \dfrac{AC}{AB}$ soit $\cos^2(\widehat{A}) = \dfrac{AC^2}{AB^2}$

• On a : $\sin^2(\widehat{A}) + \cos^2(\widehat{A}) = \dfrac{CB^2}{AB^2} + \dfrac{AC^2}{AB^2} = \dfrac{AC^2+CB^2}{AB^2} = \dfrac{AB^2}{AB^2} = 1$

• Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout angle } \widehat{A},\ \cos^2(\widehat{A}) + \sin^2(\widehat{A}) = 1}$